

Le Trasformazioni geometriche e Cabri

di

Carmelo Di Stefano¹

ABSTRACT

LO STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE È CERTAMENTE UNO DEGLI ARGOMENTI MATEMATICI PIÙ ADATTI A ESSERE TRATTATI CON L'USO DI CABRI. IN CABRI DIVERSI COMANDI SONO PREDEFINITI. IN QUESTO LAVORO VOGLIAMO CONSIDERARE ATTIVITÀ CHE HANNO INVECE BISOGNO DI UN OPPORTUNO APPROCCIO PER ESSERE RISOLTE.

1. Posizione del problema

Che Cabri possa essere utilizzato efficacemente nella didattica della matematica, è stato avvertito sin dall'apparire del software. Solo che, come accade spesso con le nuove tecnologie, entrano spesso in gioco parecchi dubbi. Non vogliamo entrare nella diatriba decennale che vede contrapposti gli insegnanti "tradizionali" con quelli "innovativi", ognuno dei quali ha certamente tanti torti quanti meriti nell'aderire incondizionatamente a uno solo dei punti di vista possibili. Quel che vogliamo fare è invece di esporre alcune idee che illustrino l'utilizzo effettivo di Cabri in un particolare argomento curriculare, di un qualsiasi indirizzo scolastico superiore.

Nei curricoli di matematica dei diversi indirizzi delle scuole medie superiori italiane, ormai da qualche anno compare l'argomento delle trasformazioni geometriche, naturalmente con diversi gradi di approfondimento. Certamente per tutti gli indirizzi è prevista, almeno a livello introduttivo, lo studio delle isometrie da un punto di vista sintetico. Per indirizzi più "forti" si prevede anche lo studio, sia sintetico che analitico, di isometrie, similitudini (in particolare omotetie) e affinità.

Vogliamo proporre alcune idee per studiare le trasformazioni geometriche con Cabri. Eccone alcune.

1. Studio delle proprietà elementari (La conoscenza di quanti elementi corrispondenti determina la trasformazione? Ci sono elementi uniti? Quali proprietà geometriche sono conservate?)
2. Costruzione di macro per definire trasformazioni non presenti di default;
3. Simulazione del movimento;
4. Attività di congettura sul risultato della composizione di due trasformazioni note;
5. Trasformazione di una conica in forma canonica;
6. Studio di alcune opere grafiche di Escher;

¹ Liceo Scientifico "E. Vittorini" – Gela; Formatore A.D.T. per la Sicilia.

2. Studio delle proprietà elementari.

Cominciamo a ricordare che Cabri ha predefiniti i seguenti 6 comandi relativi alle trasformazioni geometriche (ci riferiamo all'ultima versione del software, quella nota sotto il nome di II plus)

Simmetria assiale
Simmetria centrale
Traslazione
Rotazione
Omotetia
Inversione

Come si vede le prime quattro di esse sono isometrie, la quinta è una particolare similitudine, l'ultima invece è una trasformazione in genere non studiata nelle scuole superiori italiane.

La prima questione da risolvere è però la seguente: Quanti punti con i relativi corrispondenti dobbiamo conoscere per determinare univocamente la trasformazione?

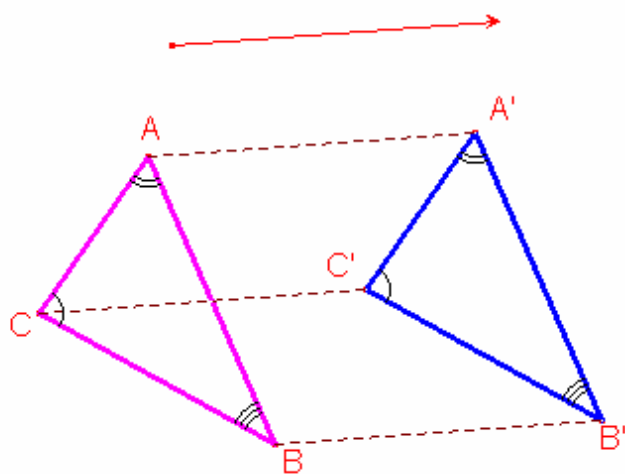
Preferiamo fornire una risposta analitica. Una affinità ha equazioni dipendenti da 6 parametri:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}; \text{ conoscere un punto e il proprio corrispondente equivale a due informazioni, per-}$$

ciò la conoscenza di 3 coppie di punti corrispondenti individua un'affinità, quindi anche un'isometria e una similitudine.

Passiamo al secondo problema: Come possiamo verificare che una data trasformazione è una isometria o una omotetia o altro?

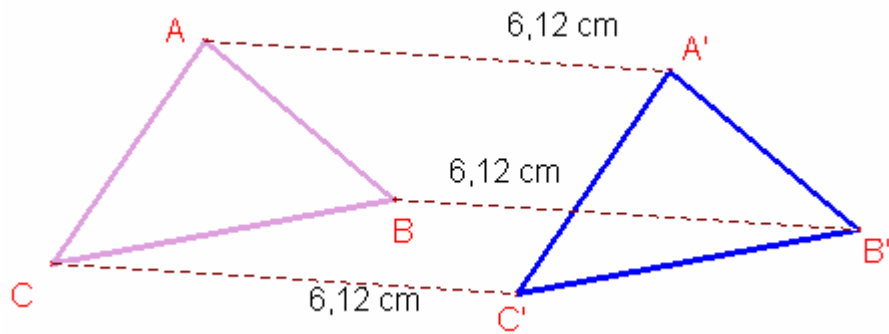
Per verificare che una isometria è tale possiamo calcolare le misure delle caratteristiche delle figure (lati, angoli, ...). Oppure possiamo usare Cabri come una lavagna raffinata e operare quindi su di essa con le tecniche della geometria. Possiamo per esempio lavorare sulla seguente figura o mediante i comandi predefiniti di Cabri, o ragionando su di essa per provare che la traslazione è una isometria.



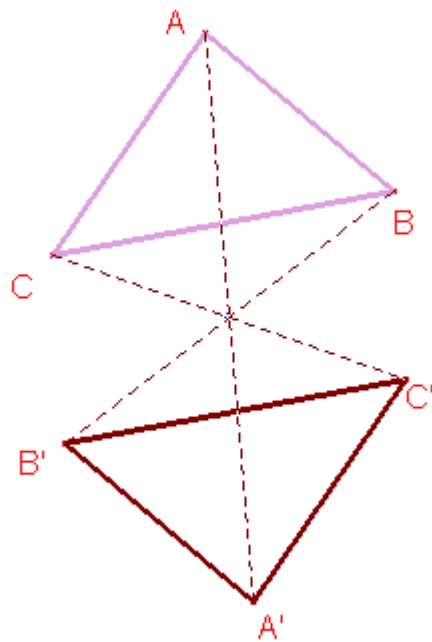
A'C' = 2,53 cm	AC=2,53 cm
A'B'=4,17 cm	AB=4,17 cm
C'B' = 3,58 cm	CB=3,58 cm
A'=1,0 rad	A=1,0 rad
B'=0,6 rad	B=0,6 rad
C'=1,5 rad	C=1,5 rad

E all'interno delle isometrie, come verifichiamo che abbiamo a che fare con una traslazione, rotazione, ...?

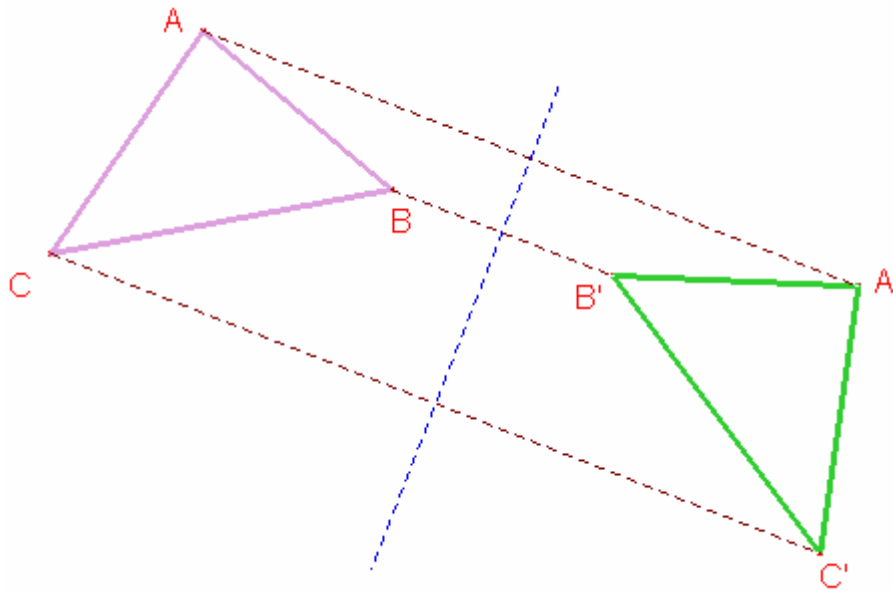
Basta tenere conto della stessa definizione. Così nel caso delle traslazioni, quel che deve accadere è che i segmenti che congiungono punti corrispondenti devono essere isometrici e paralleli.



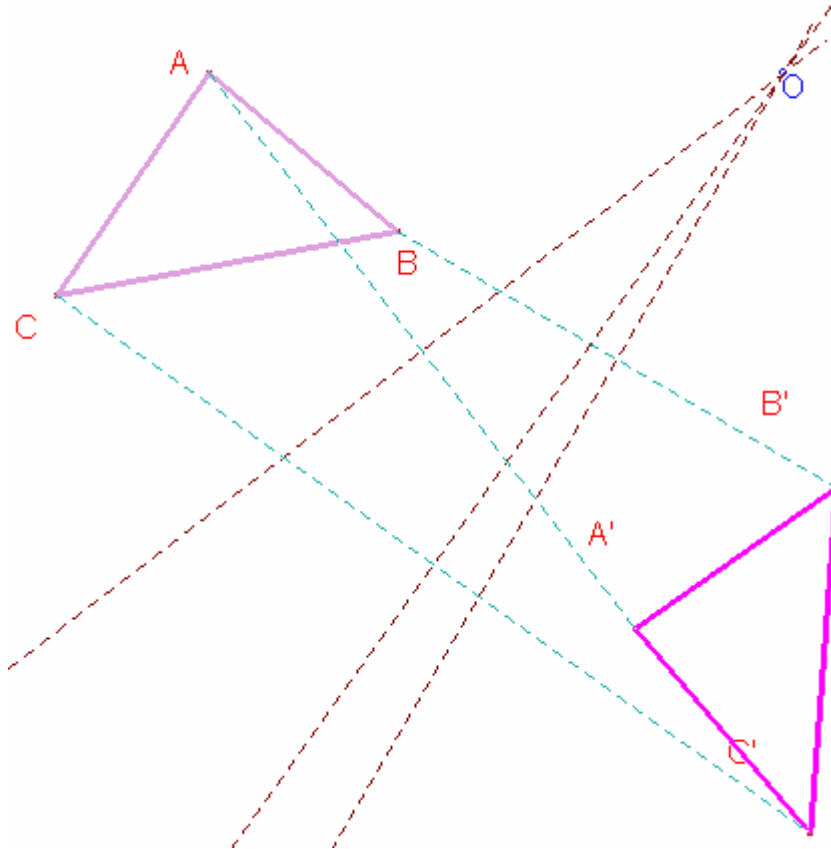
Per le simmetrie centrali i detti segmenti devono concorrere nel centro di simmetria.



Per le simmetrie assiali i segmenti sono paralleli ma non isometrici.



Infine per le rotazioni gli assi dei segmenti devono concorrere nel centro di rotazione.



Se nessuna delle precedenti proprietà è verificata abbiamo a che fare con l'isometria nota sotto il nome di antitraslazione o glissosimmetria.

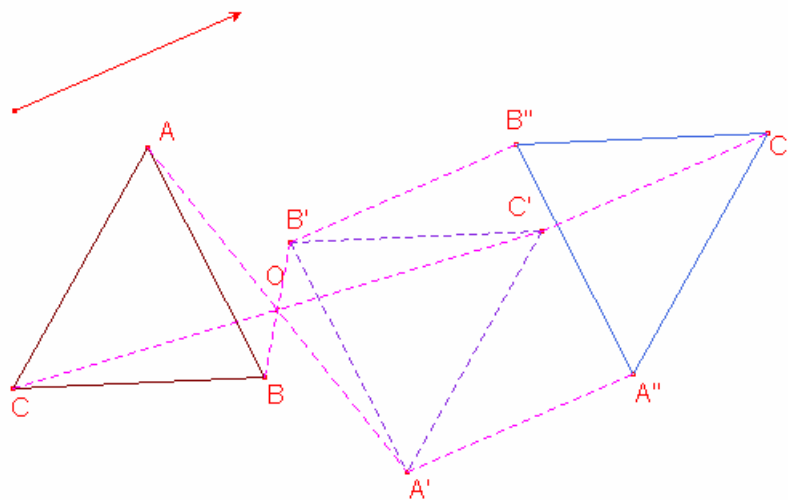
Per quel che riguarda gli elementi uniti è certo più efficace l'approccio analitico, ma anche con Cabri possiamo effettuare lo studio. Non approfondiamo il discorso.

3. Macro e trasformazioni geometriche

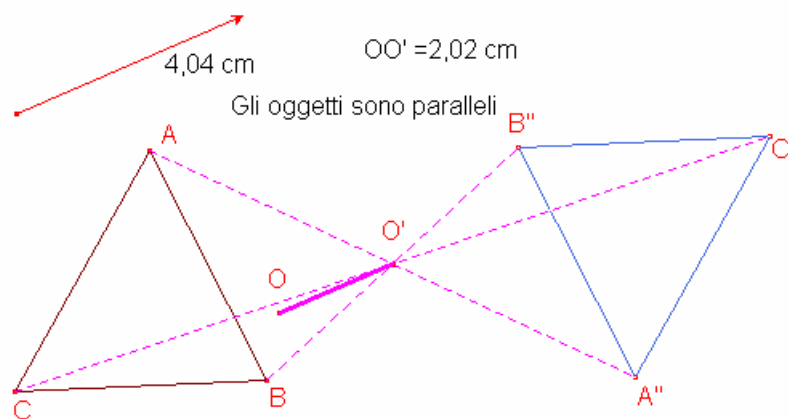
Ciò che manca a Cabri è uno strumento che permetta, date due figure, ottenute una dall'altra mediante una trasformazione geometrica, di determinare il tipo di tale trasformazione. Ciò risulta particolarmente importante quando si compongono trasformazioni fra di loro.

Per risolvere tale problema dobbiamo tenere conto di quanto detto a proposito delle caratteristiche "geometriche" di ciascuna trasformazione.

Vediamo un esempio: la composizione fra una simmetria centrale e una traslazione.



Intanto costruiamo le figure, unendo i vertici corrispondenti. Adesso lavoriamo sulla prima e ultima figura.



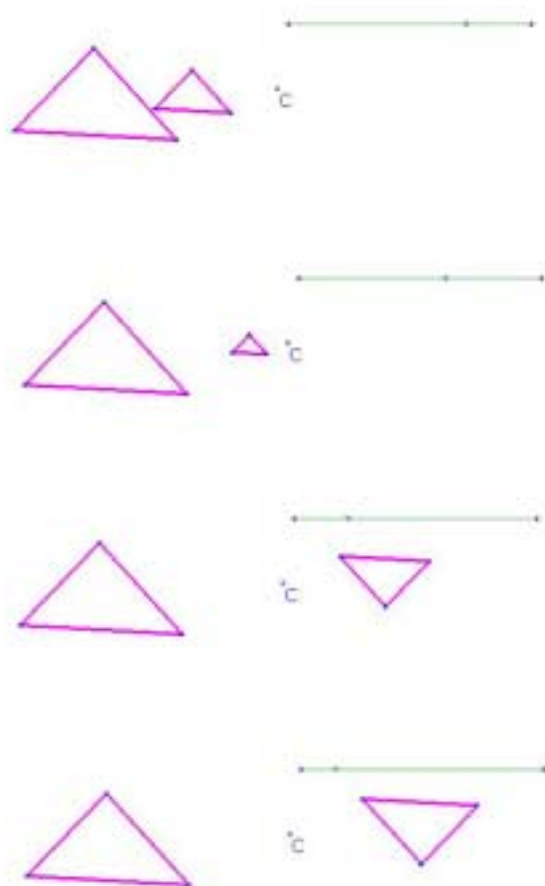
Unendo i vertici corrispondenti abbiamo verificato che si incontrano in un punto, il che ci suggerisce di avere a che fare con una simmetria centrale. Osservando la figura ci sembra che il segmento che ha per estremi i centri sia parallelo al vettore; usando l'apposito comando, Cabri risponde che la nostra impressione è corretta. Inoltre, misurando tale segmento e il vettore, congetturiamo che questo sia doppio dell'altro. Tutte queste congetture sono corrette e possiamo sia verificarle più volte con Cabri, sia dimostrarle con lo stesso software.

Possiamo costruire anche le trasformazioni affini, sfruttandone le equazioni e la possibilità di operare sul piano cartesiano.

4. Simulazione del movimento

Sfruttando il comando animazione possiamo anche simulare il movimento. Per esempio per una traslazione basta costruire il vettore con l'estremo non punto di applicazione su un segmento, quindi costruiamo la traslazione relativa al detto vettore, che diviene così variabile, dato che ne possiamo spostare l'estremo, quindi la lunghezza, sul segmento. A questo punto facendo animare il punto vincolato sull'estremo, assisteremo allo "spostamento" del triangolo iniziale che si porta a raggiungere la posizione finale.

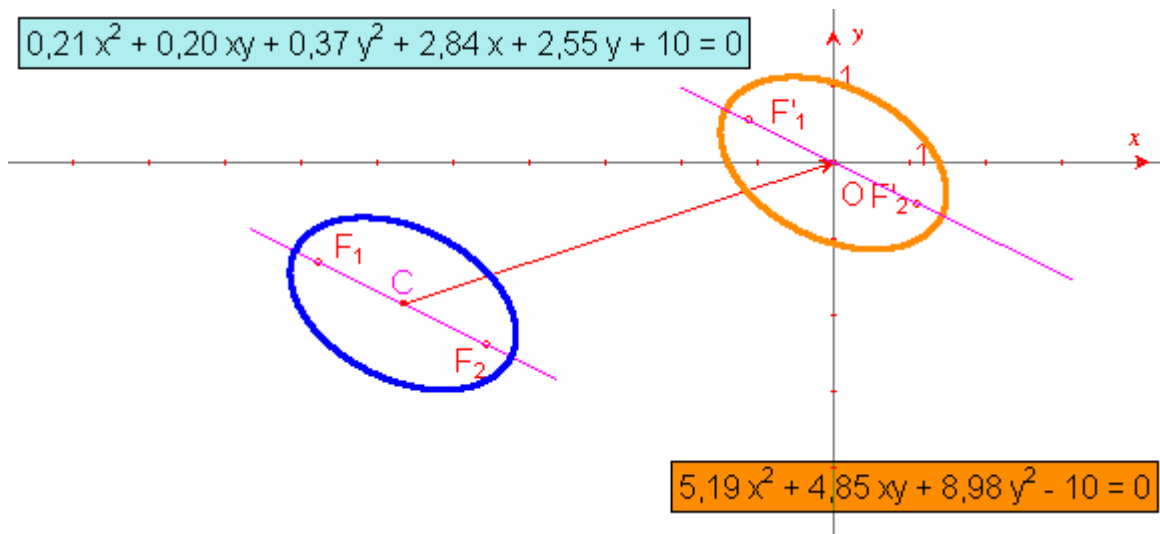
Un po' più complicato appare il problema per le simmetrie centrali. Ci faremo aiutare dall'omotetia, definendo un'omotetia, sempre variabile, dipendente dal rapporto fra due misure di segmenti. In tal modo costruiremo una omotetica della figura che parte da un rapporto $+1$ (identità) fino a un rapporto -1 (simmetria centrale), come esemplificato in figura.



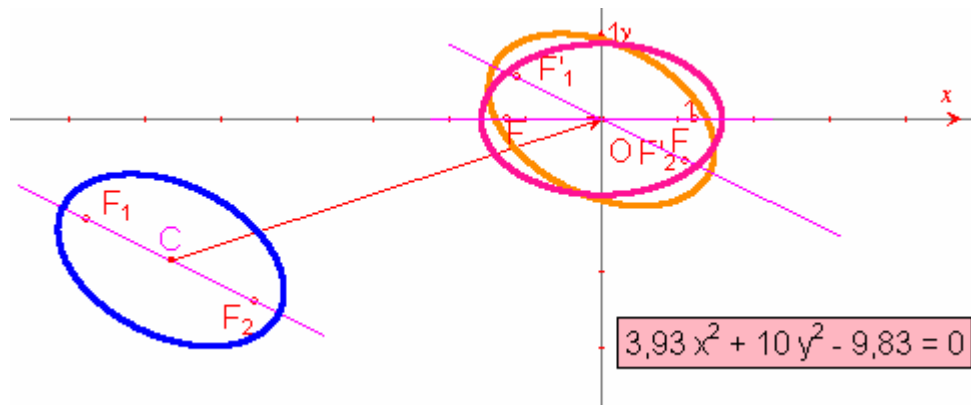
5. Coniche e trasformazioni

Nella scuola secondaria vengono studiate alcune semplici coniche, in particolare la parabola, ellisse e iperbole sono spesso accennate, in ogni caso tutte sono studiate in forma canonica. Ora la canonicità di una conica è del tutto fittizia, dato che ciò dipende esclusivamente dal sistema di riferimento. Risulta interessante mostrare agli studenti che le trasformazioni ci aiutano facilmente a portare una

conica qualsiasi alla sua forma canonica. Intanto costruiamo una conica in modo da conoscerne le caratteristiche, per esempio per un'ellisse i fuochi e quindi l'asse focale. Con una traslazione portiamo il centro di simmetria a coincidere con l'origine degli assi: spariscono i termini di primo grado.

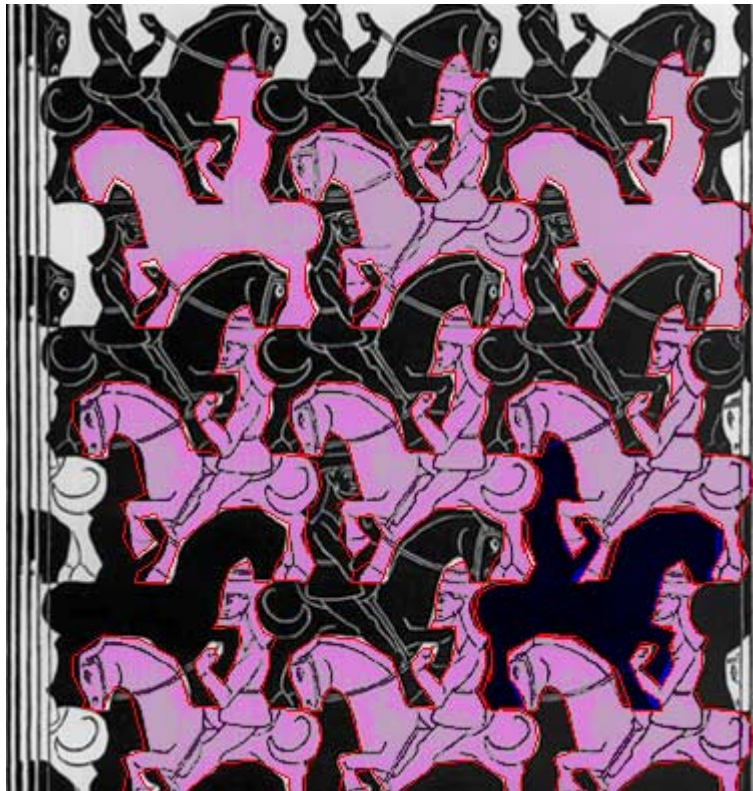
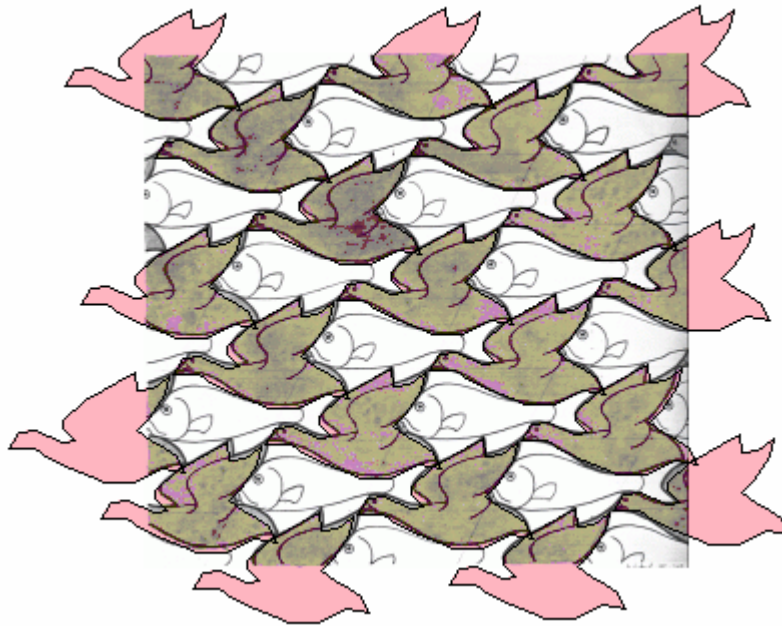


Quindi con una rotazione facciamo coincidere l'asse focale con uno degli assi coordinati e il gioco è fatto.



6. Escher e Cabri

Sfruttando le nuove caratteristiche di Cabri II plus, che ci permettono di porre uno sfondo al foglio di lavoro, mettiamone uno preso da un'opera grafica di Escher che possa servirci per i nostri scopi, per esempio quello noto sotto il nome di pesci e uccelli. Con pazienza copiamo una delle immagini che poi si ripeteranno, facendola divenire un poligono. Applichiamo poi le corrette trasformazioni e il gioco è fatto, come mostrato nelle successive figure.



BIBLIOGRAFIA

- U. Cassina, Trasformazioni geometriche elementari, in Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Hoepli
H.S.M. Coxeter Introduction to geometry, Wiley, 1989
C. Di Stefano, Cabri A – B – C – Ghisetti & Corvi, Milano
Klein F., Il programma di Erlangen, La Scuola

SITOGRAFIA

- <http://www.cabri.com/>
www.cabri.net/
<http://www.cabrijava.net/>
<http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/index.htm>
<http://Xoomer.virgilio.it/mathontheweb>